数理解析研究所講究録
132巻 1971年 54-62

2変数正則函数の Iteration について

東大 理　高野 恭一

§1　目的

(1.1)
$$f(x,y) = x\Big(1 + x^{\mu}\sum_{j+k=0}^{\infty} a_{jk}x^{j}y^{k}\Big),\qquad \left(\begin{array}{l}|x|<\delta,\ |y|<\Delta \\ \text{で収束}\end{array}\right)$$
$$g(x,y) = by\Big(1 + \sum_{j+k=0}^{\infty} b_{jk}x^{j}y^{k}\Big),$$

$$|b|<1,\qquad a_{00}\neq 0,\qquad \nu \equiv \min\{j;\ b_{j,0}\neq 0\} < \mu$$

なる (f, g) の complex analytic iteration を求める。すなわち (θ, x, y) について正則な $f(\theta; x, y)$, $g(\theta; x, y)$ で次の性質をみたすものを調べる。

$$f(0; x, y) = x, \qquad g(0; x, y) = y$$
$$f(1; x, y) = f(x, y), \qquad g(1; x, y) = g(x, y).$$
$$f(n; f(m; x, y), g(m; x, y)) = f(n+m; x, y)$$
$$g(n; f(m; x, y), g(m; x, y)) = g(n+m; x, y).$$

$x^{-\mu} = s$, $\log y = t$, $f^{-\mu} = F$, $\log g = G$ なる変換で、(1.1) は、次のように変換される。

(1.2)
$$F(s,t) = s\Big(1 + s^{-1}\sum_{j+k=0}^{\infty}\alpha_{jk}s^{-\frac{j}{\mu}}e^{kt}\Big)$$
$$G(s,t) = t + \zeta + \sum_{j+k=0}^{\infty}\beta_{jk}s^{-\frac{j}{\mu}}e^{kt}$$

$\alpha_{00} = \lambda_{00} \equiv \xi$,　$\zeta = \log b$　$\therefore$ $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$.

$\min\{j,\ \beta_{j,0}\neq 0\} = \nu < \mu$。

$s^{\frac{1}{\mu}}$, $\log t$ の branch は勝手に固定しておく。$s^{\frac{1}{\mu}}$ の branch のとり方に応じて、μ個に分割された x の領域の 1 つが対応しているが、$\log t$ の branch のとり方は、y の領域に影響しないことに注意すると、(1.2) の iteration を調べれば (1.1) の iteration がわかる。従ってこの小文では、(1.2) の iteration についてのみ述べるが (1.1) についていえば 2μ 個の iteration が求められたことになるのである。その意味は、θ が正の実軸をふくむ角領域にある場合、μ個に分割された x の領域ごとに (1.1) の iteration がわかり、θ が負の実軸を含む角領域にある場合には、また μ個に分割された x の領域ごとに（分割は前の場合と異なる）、(1.1) の iteration がわかるということである。

我々は (1.2) に対して、図式

$$(1.3)\quad \begin{tikzcd} (s,t) \arrow[r, "(F,G)"] \arrow[d, "(\varphi,\psi)"] & {} \arrow[d, "(\varphi,\psi)"] \\ (\sigma,\tau) \arrow[r, "(\sigma+\xi,\ \tau+\xi)"'] & {} \end{tikzcd}$$

を可換にする (φ,ψ) の解析的表現、さらに (φ,ψ) の逆函数のそれについて調べ、最後に Complex analytic iteration $F(\theta; s,t)$, $G(\theta; s,t)$ の漸近展開を詳しく調べる。展開は、θ を固定した場合と、(s,t) を固定した場合とで異なる。

§2. (φ,ψ) を求めること

$\boxed{\text{定理}}$ 『図式 (1.3) を可換にする次の形の (φ, ψ) がある。

$$\varphi(s,t) \sim s\left(1 + p\frac{\log s}{s} + \sum_{j=1}^{\mu} p_j s^{-\frac{j}{\mu}} + s^{-1}\sum_{j+k=1}^{\infty} p_{jk} s^{-\frac{j}{\mu}} e^{kt}\right),$$

$$\psi(s,t) \sim t + \sum_{j+k=1}^{\infty} q_{jk} s^{-\frac{j}{\mu}} e^{kt}。$$

1) $\{\{p_j\}, p, \{p_{jk}\}\}$ と $\{q_{jk}\}$ は独立に決まる。

2) i) $\{p_j\}$, p, $\{p_{jk}\}$ は $p_1, \cdots, p_{\mu-1}, p, \{p_{jk}\}_{j+k=1}, \{p_{jk}\}_{j+k=2}, \cdots\cdots$ の順にきまり，p_μ は任意にとれる。

ii) $\{p_j\}_{j=1,\dots,\mu-1}$, p, $\{p_{jk}\}$ は p_μ に関係せず，かつ一意的に決まる。

3) $\{q_{jk}\}$ は $\{q_{jk}\}_{j+k=1}, \{q_{jk}\}_{j+k=2}, \cdots\cdots$ の順に一意的に決まる。』

形式的級数 (φ, ψ) は次の定理で述べる解析的意味をもつ。ただし $s^{\frac{1}{\mu}}$ の branch は勝手に固定し，$\log s$ の branch は $\log 1 = 0$ に固定しておく。

$\boxed{\text{定理}}$ 『任意に $\varepsilon > 0$ を固定した時、十分大きな r, R が存在し，$(s,t) \in D(\varepsilon, r, R) \equiv D_s(\varepsilon, r) \times D_t(R)$ なるとき図式 (1.3) を可換にする (φ, ψ) で次の性質をもつものが、存在する。ただし $D_s(\varepsilon, r) = \{ s \in \mathbb{C}\ ;\ |s| > r, |\arg s - \arg \xi| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ または $\operatorname{Im}(e^{-i(\arg \xi - \varepsilon)} s) > r$ または $\operatorname{Im}(e^{i(\arg \xi + \varepsilon)} s) < -r \}$,

$D_t(R) = \{ t \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re} t < -R \}$.

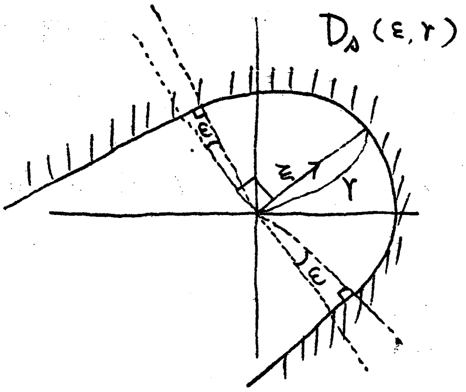
1) φ, ψ は $D(\varepsilon, r, R)$ で正則.

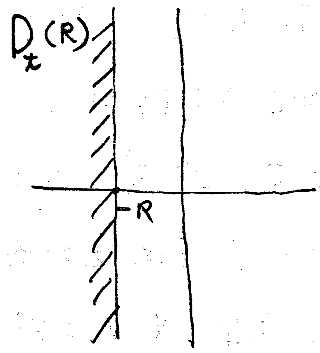
2) $\varphi(s,t) = s\left(1 + p\frac{\log s}{s} + \sum_{j=0}^{\mu} p_j s^{-\frac{j}{\mu}} + s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s) e^{kt}\right)$

$$\psi(s,t)=t+\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(s)e^{kt},\quad \text{（ $(s,t)\in D$ で一様収束）}$$

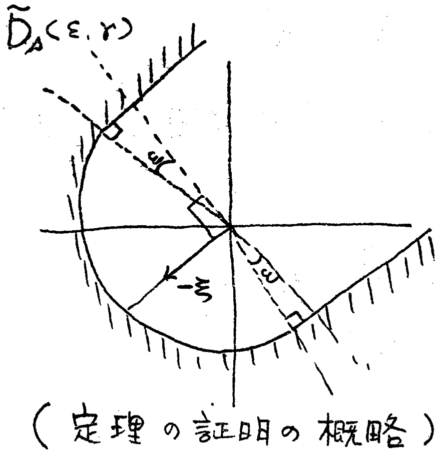
かつ　$s\in D_s(\varepsilon,r)$　が　$s\to\infty$　の時

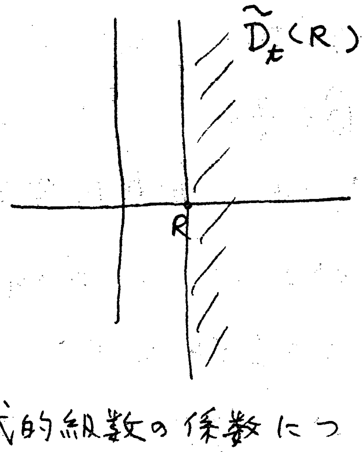
$$\varphi_k(s)\sim\sum p_{jk}s^{-\frac{j}{k}},\quad \psi_k(s)\sim\sum q_{jk}s^{-\frac{j}{k}}。 ■$$





図式(1.3)において(F, G)の逆函数を考えると、定理の $D(\varepsilon, r, R)$ の代りに $\tilde{D}(\varepsilon, r, R)=\tilde{D}_s(\varepsilon, r)\times\tilde{D}_t(R)$ をとっても同様の定理が成り立つ。もちろん領域が異なるのであるから、(φ, ψ) も異なるのである。





（定理の証明の概略）　形式的級数の係数については、計算するだけである。解析的意味づけは、まず領域

$$D'=\left\{s\in\mathbb{C}\ ;\ |s|>r,\ |\arg s-\arg\xi|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\}\times D_t(R)$$

で定理に述べている性質をもつ(φ, ψ)を求める。これは福原先生の不動点定理と、差分方程式の性質を用いてやる。次にこれを、(φ, ψ)のみたしている函数方程式を用いて$D(\varepsilon, r, R)$全体に解析接続し、得られた(φ, ψ)が$D(\varepsilon, r, R)$全体で、同一の漸近展開をもつことを(F, G)の*iteration*の評価を用いて示す。領域をこの方法で拡大するとき、r, Rは一般に更に大きくとる必要がある。

§3　(φ, ψ)の逆函数

(φ, ψ)は$D(\varepsilon, r, R)$から$(\varphi, \psi)(D(\varepsilon, r, R))$への*biholomorphic map*であることは容易に確かめられる。この節では逆函数の漸近的性質を調べる。

$\boxed{\text{定理}}$ 「$D(\varepsilon, r, R)$と$\hat{D}(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}, \hat{R}) = (\hat{D}_\sigma(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}) + p_\mu) \times \hat{D}_\tau(\hat{R})$を適当にとると

$$(\varphi, \psi)(D(\varepsilon, r, R)) \subset \hat{D}(\tfrac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}, \hat{R})$$

となり$\hat{D}(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}, \hat{R})$で定義される次の性質をもつ正則函数$(\varphi^*, \psi^*)$が存在する。

1) (φ^*, ψ^*) : *holomorphic* in $\hat{D}(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}, \hat{R})$

2) $(s, t) \in D(\varepsilon, r, R)$に対して

$$(\varphi^*, \psi^*) \circ (\varphi, \psi)(s, t) = (s, t)$$

3) $\varphi^*(\sigma, \tau) = \sigma(1 + \hat{p}(\sigma, \frac{\log\sigma}{\sigma}, e^\tau))$

$$\psi^*(\sigma, \tau) = \tau + \hat{q}(\sigma, \tfrac{\log\sigma}{\sigma}, e^\tau)$$

$$\hat{p}(\sigma, v, w) = \sum \hat{p}_{k,l}(\sigma) v^k w^l$$
$$\hat{q}(\sigma, v, w) = \sum \hat{q}_{k,l}(\sigma) v^k w^l$$

$\hat{p}, \hat{q}$ は $\sigma \in (\hat{D}_\sigma(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}) + P_\mu)$, $|v| < \hat{\delta}'$, $|w| < \hat{\delta}''$ で収束。
$\hat{p}_{k,l}(\sigma)$, $\hat{q}_{k,l}(\sigma)$ は $\hat{D}_\sigma(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}) + P_\mu$ で正則かつ $\sigma \in \hat{D}_\sigma(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}) + P_\mu$ が $\sigma \longrightarrow \infty$ のとき次のように漸近展開される。

$$\hat{p}_{kl}(\sigma) \sim \sum \hat{p}_{jkl}\,\sigma^{-\frac{j}{\mu}}, \quad \hat{q}_{kl}(\sigma) \sim \sum \hat{q}_{j,k,l}\,\sigma^{-\frac{j}{\mu}} \quad \blacksquare$$

上記定理の $\hat{p}_{jkl}$, $\hat{q}_{j,k,l}$ は、形式的計算で計算できる係数である。

定理の証明は、写像 $(\varphi, \psi) : (s, t) \rightsquigarrow (\sigma, \tau)$ を

$x = s^{-\frac{1}{\mu}}$, $y = \frac{\log s}{s}$, $z = e^t$, $u = \sigma^{-\frac{1}{\mu}}$, $v = \frac{\log \sigma}{\sigma}$, $w = e^\tau$

なる変換で 写像 $(x, y, z) \rightsquigarrow (u, v, w)$ になおしこの写像の逆の解析的性質をやはり福原先生の不動点定理を用いて調べ、もとの写像(φ, ψ)の逆にもどしてやるのである。

定理は §2の $\hat{D}(\varepsilon, r, R)$ に対応している(φ, ψ)についても同様に示せる。

§4. Complex analytic iteration $F(\theta; s, t)$, $G(\theta; s, t)$

$(s, t) \in D(\varepsilon, r, R)$ に対して

$(\varphi(s,t), \psi(s,t)) \in \hat{D}(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}, \hat{R})$ であるが、もし

$(\varphi(s,t) + \theta\xi, \psi(s,t) + \theta\zeta) \in \hat{D}(\frac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}, \hat{R})$

ならば

$(\varphi^*, \psi^*)(\varphi(s,t) + \theta\xi, \psi(s,t) + \theta\zeta)$

が求める $(F(\theta; s, t),\ G(\theta; s, t))$ である。

$$\Theta = \{\ \theta\ ;\ |\arg\theta| < \tfrac{2}{3}\varepsilon\ \}$$

とすると、 $\theta \in \Theta$ に対して

$$(\hat{D}_\sigma(\tfrac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}) + P_\mu + \theta\xi) \times (\hat{D}_\tau(\hat{R}) + \theta\dot{\xi})$$
$$\subset (\hat{D}_\sigma(\tfrac{2}{3}\varepsilon, \hat{r}) + P_\mu) \times \hat{D}_\tau(\hat{R})$$

が確かめられるから

$(s, t) \in D(\varepsilon, r, R)$, $\theta \in \Theta$ に対して

$(F(\theta; s, t), G(\theta; s, t))$ が定義されることがわかる。

この節では $(F(\theta; s, t),\ G(\theta; s, t))$ の漸近的性質を述べる。 θ を固定した場合と、(s, t) を固定した場合に分けて調べる。

$\boxed{\text{定理}}$ ($\theta \in \Theta$ を固定した場合) 「 $\forall N$ に対して

$$F(\theta; s, t) = s\Big(1 + s^{-1}\sum_{j+k=0}^{N-1} \alpha_{jk}(\theta, e^{\theta\xi})\, s^{-\frac{j}{\mu}} e^{kt} + O\big(|s|^{-\frac{N}{\mu}} + \big|\tfrac{\log s}{s}\big|^N + e^{\mathrm{Re}\, Nt}\big)\Big)$$

$$G(\theta; s, t) = t + \theta\xi + \sum_{j+k=1}^{N-1} \beta_{jk}(\theta, e^{\theta\xi})\, s^{-\frac{j}{\mu}} e^{kt} + O\big(|s|^{-\frac{N}{\mu}} + \big|\tfrac{\log s}{s}\big|^N + e^{\mathrm{Re}\, Nt}\big),$$

もし $(s, t) \in D(\varepsilon, r, R)$ が $(s, t) \longrightarrow \infty$ の時。ここで

$\alpha_{00}(\theta, e^{\theta\xi}) = \xi \cdot \theta$ である。さらに

$\alpha_{jk}(\theta, e^{\theta\xi}) = \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_j^\ell(\theta)\, e^{\ell\xi\theta}$, $\alpha_j^\ell(\theta)$: θ の多項式.

$\alpha_j^k(\theta)$ については $k \neq 0$ の場合には

$$\alpha_j^k(\theta) = \frac{\alpha_{jk}}{e^{k\xi} - 1} = \text{定数}$$

$k=0$ の場合には $\alpha_{j,0}(\theta, e^{\theta\zeta}) = \alpha_j^0(\theta)$

$\deg \alpha_j^0(\theta) \leqq [\frac{j}{\mu}+1]$.（ [ ] は Gauß symbol ）

特に $0 \leqq j < \mu$ については

$$\alpha_{j,0}(\theta, e^{\theta\zeta}) = \alpha_{j,0} \cdot \theta .$$

$\beta_{jk}(\theta, e^{\theta\zeta})$ についても同様。」

§2，§3 で (φ, ψ) とその逆の漸近展開が詳しく調べてあるのでそれらを合成すればよい。そこで $s^{-\frac{j}{\mu}}(\frac{\log s}{s})^k e^{\ell t}$ の係数 $\alpha_{jk\ell}(\theta, e^{\theta\zeta}) \equiv 0$ （ $k \neq 0$ ）であることは、$\theta = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ について $\alpha_{jk\ell}(\theta, e^{\theta\zeta}) = 0$ であることよりいえる。他の証明は略す。

$\boxed{\text{定理}}$（ $(s,t) \in D(\varepsilon, r, R)$ を固定した場合）「$\forall N$ に対して $\theta \in$ Ⓗ を $\theta \to \infty$ としたとき

$$F(\theta; s, t) = \xi\theta\Big(1 + \sum_{j+k+\ell=1}^{N-1} e^{\ell\psi(s,t)} P_{jk\ell}(\varphi(s,t))(\xi\theta)^{-\frac{j}{\mu}}\Big(\frac{\log \xi\theta}{\xi\theta}\Big)^k e^{\ell\zeta\theta}$$
$$+ O\Big(|\xi\theta|^{-\frac{N}{\mu}} + \Big|\frac{\log \xi\theta}{\xi\theta}\Big|^N + e^{\mathrm{Re}\, N\zeta\theta}\Big)\Big),$$

$$G(\theta; s, t) = \zeta\theta + \psi(s,t) + \sum_{j+k+\ell=1}^{N-1} e^{\ell\psi(s,t)} Q_{jk\ell}(\varphi(s,t))(\xi\theta)^{-\frac{j}{\mu}}\Big(\frac{\log \xi\theta}{\xi\theta}\Big)^k e^{\ell\zeta\theta}$$
$$+ O\Big(|\xi\theta|^{-\frac{N}{\mu}} + \Big|\frac{\log \xi\theta}{\xi\theta}\Big|^N + e^{\mathrm{Re}\, N\zeta\theta}\Big).$$

ここで $P_{jk\ell}(\varphi)$, $Q_{jk\ell}(\varphi)$ は φ の多項式で計算できる。」

この定理は、§2，§3 よりただちに証明できる。

$\tilde{D}(\varepsilon, r, R)$ に対応している (φ, ψ) とその逆から構成される Complex analytic iteration については

$$\tilde{Ⓗ} = \{\theta \,;\, |\arg(-\theta)| < \tfrac{2}{3}\varepsilon\}$$

とすると，$(s,t)\in\tilde{D}(\varepsilon,r,R)$，$\theta\in\widetilde{\Theta}$ に対して、上記二定理と同様のものが得られる。

References

(I) R. Bellman, The iteration of power series in two variables, Duke Math. J., I9 (I952), 339-457.

(2) G. Koenigs, Recherches sur les integrales de certaines equations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm.,3 t.I (I884), s.3 - s.4I.

(3) J. Hadamard, Two works on iteration and related equations, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (I944), 67-75.

(4) 福原満洲雄，Schröder の函数方程式について，九大理.報告、数学の部 I (I945), I90-I96.

(5) J. Malmquist, Sur les points singuliers des equations differentielles II, Ark. Math. Astr. Fys., I5 27 (I92I).

(6) H. Töpfer, Komplexe Iterationsindizes ganzer und rationales Funktionen, Math. Ann.I2I, I9I-222.

(7) 占部実，有理変換群の函数方程式への応用，数学 6 (I954), 65- 72.